**Лабораторная работа №3**

# Тема: Интерполирование функций

Пусть функция  задана таблично, либо ее вычисление требует громоздких выкладок. Заменим приближенно функцию  на какую-либо функцию , так, чтобы отклонение  от  было в заданной области в некотором смысле минимальным. Подобная замена называется аппроксимацией функции , а функция  – аппроксимирующей (приближающей) функцией.

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений  и  в конечном числе точках  (), т. е.

|  |  |
| --- | --- |
| , , . | (3.1) |

В указанном случае, когда ищется приближение функции на некотором конечном интервале, нахождение приближенной функции называют интерполяцией (или интерполированием), точки , ,…,, ‑ узлами интерполяции.

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента . В этом случае шаг, с которым задаются табличные значения функции  равен  () является величиной постоянной. Для таких случаев построение интерполяционных формул как и вычисление по этим формулам заметно упрощается.

Интерполяционным многочленом Лагранжа второго порядка называется многочлен вида

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3.2) |

**Задание 1**

По заданной таблице значений функции составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа (3.2) и построить график Исходные данные берутся из таблицы 3.1.

Tаблица 3.1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 1 | 7 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 5 | 2 | 8 |
| 3 | 0 | 2 | 3 | -1 | -4 | 2 |
| 4 | 7 | 9 | 13 | 2 | -2 | 3 |
| 5 | -3 | -1 | 3 | 7 | -1 | 4 |
| 6 | 1 | 2 | 4 | -3 | -7 | 2 |
| 7 | -2 | -1 | 2 | 4 | 9 | 1 |
| 8 | 2 | 4 | 5 | 9 | -3 | 6 |
| 9 | -4 | -2 | 0 | 2 | 8 | 5 |
| 10 | -1 | 1.5 | 3 | 4 | -7 | 1 |
| 11 | 2 | 4 | 7 | -1 | -6 | 3 |
| 12 | -9 | -7 | -4 | 3 | -3 | 4 |
| 13 | 0 | 1 | 4 | 7 | -1 | 8 |
| 14 | 8 | 5 | 0 | 9 | 2 | 4 |
| 15 | -7 | -5 | -4 | 4 | -4 | 5 |

**Задание 2**

Интерполяционным многочленом Лагранжа порядка  называется многочлен, определяемый следующим выражением

|  |  |
| --- | --- |
| . | (3.3) |

Для погрешности  приближения функции  с использованием данного многочлена Лагранжа выполняется неравенство

|  |  |
| --- | --- |
| , , | (3.4) |

где .

Вычислить одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента  с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа порядка  и оценить погрешность интерполяции. Для выполнения задания исходные данные и вид функции берутся из таблицы 3.2, 3.3 или 3.4.

Таблица 3.2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № варианта | Значение, *а* | № таблицы |
| 1 | -2 | 3.3 |
| 2 | 3.77 | 3.4 |
| 3 | 0.55 | 3.3 |
| 4 | 4.83 | 3.4 |
| 5 | 3.5 | 3.3 |
| 6 | 5.1 | 3.4 |
| 7 | 1.75 | 3.3 |
| 8 | 4.2 | 3.4 |
| 9 | -1.55 | 3.3 |
| 10 | 6.76 | 3.4 |

Таблица 3.3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -3.2 | -0.8 | 0.4 | 2.8 | 4.0 | 6.4 | 7.6 |
|  | -1.94 | -0.61 | 0.31 | 1.81 | 2.09 | 1.47 | 0.68 |

Таблица 3.4

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1.3 | 2.1 | 3.7 | 4.5 | 6.1 | 7.7 | 8.5 |
|  | 1.777 | 4.563 | 13.84 | 20.39 | 37.34 | 59.41 | 72.4 |

Таблица 3.5

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 | 0.40 |
|  | 0.995 | 0.988 | 0.980 | 0.969 | 0.955 | 0.939 | 0.921 |

Таблица 3.6

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.65 | 0.70 | 0.75 | 0.80 | 0.85 | 0.90 | 0.95 |
|  | 0.605 | 0.644 | 0.681 | 0.71 | 0.75 | 0.783 | 0.813 |

**Задание 3.**

Первой интерполяционной формулой Ньютона называется многочлен вида

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3.5) |

где .

Ошибка интерполяции функции на интервале  определяется следующим выражением

|  |  |
| --- | --- |
| , | (3.6) |

где  ‑ некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы , () и .

Уплотнить часть таблицы, содержащей заданные на отрезке  значения функции с использованием интерполяционного многочлена Ньютона (3.5) и оценить погрешность интерполяции  на основе формулы (3.6). Таблицу 3.7, содержащую конечные разности просчитать вручную на отрезке  с шагом . Для выполнения задания исходные данные берутся из таблиц 3.5, 3.6 и 3.8.

Соотношение (3.5) используется, если вычисляемое значение функции связано с переменной, лежащей ближе к началу отрезка . В том случае, когда вычисляемое значение функции связано с переменной, лежащей ближе к концу отрезка , применяют вторую формулу Ньютона – интерполирование назад на основе формулы (3.6).



где  и .

Таблица 3.7

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Таблица 3.8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  |  |  |  | № таблицы |
| 1 | 0.65 | 0.80 | 0.05 | 0.01 | 3.6 |
| 2 | 0.25 | 0.40 | 0.05 | 0.025 | 3.5 |
| 3 | 0.75 | 0.90 | 0.05 | 0.01 | 3.6 |
| 4 | 0.70 | 0.85 | 0.05 | 0.025 | 3.6 |
| 5 | 0.80 | 0.95 | 0.05 | 0.025 | 3.6 |
| 6 | 0.1 | 0.25 | 0.05 | 0.025 | 3.5 |
| 7 | 0.15 | 0.3 | 0.05 | 0.025 | 3.5 |
| 8 | 0.7 | 0.85 | 0.05 | 0.025 | 3.6 |
| 9 | 0.2 | 0.35 | 0.05 | 0.01 | 3.5 |
| 10 | 0.80 | 0.95 | 0.05 | 0.01 | 3.6 |

Ниже приведен примерный фрагмент выполнения лабораторной работы. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка, проходящий через точки: , , , , , .

Требуемый многочлен имеет вид

,

который после преобразования принимает следующую форму

.

Ниже приведен график рассматриваемого интерполяционного полинома.

|  |
| --- |
|  |
| Рисунок 3.1 |

**Контрольные вопросы**

1. В чем заключается особенность приближения таблично заданной функции методом интерполирования?

2. Как обосновывается существование и единственность интерполяционного многочлена?

3. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?

4. Как строятся интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона?

5. В чем особенности этих двух способов интерполяции?

6. Как производится оценка погрешности метода интерполяции многочленом Лагранжа?

7. Как используется метод интерполирования для уточнения таблиц функций?

8. В чем отличие между первой и второй интерполяционными формулами Ньютона при интерполяции на отрезке?